

数学 (一) 试题

(科目代码: 301)

考生注意事项

1. 答题前, 考生须在试题册指定位置上填写考生姓名和考生编号; 在答题卡指定位置上填写报考单位、考生姓名和考生编号, 并涂写考生编号信息点.
2. 选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上, 非选择题的答案必须写在答题卡指定位置的边框区域内. 超出答题区域书写的答案无效; 在草稿纸、试题册上答题无效.
3. 填 (书) 写必须使用黑色字迹签字笔书写, 字迹工整、笔迹清楚; 涂写部分必须使用 2B 铅笔涂填.
4. 考试结束, 将答案卡和试题册按规定交回.

一、选择题: 1~10 小题, 每小题 5 分, 共 50 分.

1. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $x - az = e^{y+az}$ (a 为非零常数) 确定, 则 ()

- A. $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{a}$ B. $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{a}$
 C. $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{a}$ D. $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{a}$

解: 令 $F(x, y, z) = x - az - e^{y+az}$, 那么

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{1}{-a - ae^{y+az}} = \frac{1}{a(1 + e^{y+az})},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-e^{y+az}}{-a - ae^{y+az}} = -\frac{e^{y+az}}{a(1 + e^{y+az})},$$

于是 $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{a}$, 选 A.

2. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{3 + (-1)^n}{4} \right]^n x^{2n}$ 的收敛域为 ()

A. $[-2, 2]$ B. $[-1, 1]$ C. $(-2, 2)$ D. $(-1, 1)$

解: 原级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{3 + (-1)^n}{4} \right]^n x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{3 + (-1)^{2n-1}}{4} \right]^{2n-1} x^{4n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{3 + (-1)^{2n}}{4} \right]^{2n} x^{4n}$$

前一个级数的收敛半径是 $\sqrt[4]{2}$, 后一个幂级数的收敛半径是 1, 再验证两端点 ± 1 处的原级数的收敛性, 注意到级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{3 + (-1)^n}{4} \right]^n$ 的一般项不趋于 0 从而级数发散, 从而得答案 D.

3. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上有定义, 则 ()

- A. 当 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, 1)$ 上单调递增时, $f(0)$ 为极小值
 B. 当 $f(0)$ 是极小值时, $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, 1)$ 上单调递增
 C. 当 $f(x)$ 的图形在 $[-1, 1]$ 上是凹的时, $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ 在 $[-1, 1)$ 上单调递增
 D. 当 $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ 在 $[-1, 1)$ 上单调递增时, $f(x)$ 的图形在 $[-1, 1]$ 上是凹的

解: 首先 A 选项可取反例 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, B 选项显然是错的. 正确答案是 C 选项, 由凹函数的定义: 如果 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 且对任意 $x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2$ 和 $\lambda \in (0, 1)$, 有

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

从这个定义条件出发, 我们证明下面一个基本结论: 对任意 $x_1 < x_2 < x_3$, 有

$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

这等同于

$$f(x_2) < f(x_3) - \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} (f(x_3) - f(x_1)) = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3) + \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1),$$

这只需要取 $\lambda = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}, 1 - \lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$, 然后令 $x_2 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_3$ 即可.

当 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上是凹的时, 对任意 $x_1, x_2 \in [-1, 1], x_1 < x_2$, 在上述不等式中取 $x_3 = 1$, 那么有

$$\frac{f(1) - f(x_1)}{1 - x_1} < \frac{f(1) - f(x_2)}{1 - x_2} \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(1)}{x_1 - 1} < \frac{f(x_2) - f(1)}{x_2 - 1}.$$

这就说明 $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ 在 $[-1, 1)$ 上单调递增.

D 选项可取反例 $f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \leq x < 0 \\ x^2 - 1, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$. 于是

$$g(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \begin{cases} \frac{x^2}{x - 1} = x + 1 + \frac{1}{x - 1}, & -1 \leq x < 0 \\ \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1, & 0 \leq x < 1 \end{cases},$$

那么容易知道 $g(x)$ 在 $[-1, 0)$ 和 $[0, 1)$ 分别单调递增, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0 < g(0) = 1$, 这就说明 $g(x)$ 在 $[-1, 1)$ 上都是单调递增的, 但 $f(x)$ 不连续, 在 $[-1, 1]$ 上不是凹函数.

4. 已知有界区域 Ω 由曲面 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 与 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 围成, 函数 $f(u)$ 连续, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz (\quad)$$

- A. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 dr \int_r^{\sqrt{4-r^2}} f(r^2 + z^2) r dz$
 B. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} dr \int_r^{\sqrt{4-r^2}} f(r^2 + z^2) r dz$
 C. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^2 f(r^2) r^2 \sin \varphi dr$
 D. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 f(r^2) r^2 \sin \varphi dr$

解: 容易得到化为柱坐标的结果是

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} dr \int_r^{\sqrt{4-r^2}} f(r^2 + z^2) r dz$$

化为球坐标的结果为

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^2 f(r^2) r^2 \sin \varphi dr$$

选 C.

5. 单位矩阵经若干次互换两行得到的矩阵为置换矩阵. 设 A 为 n 阶置换矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, 则 ()

- A. A 为置换矩阵 B. A^{-1} 为置换矩阵 C. $A^{-1} = A$ D. $A^{-1} = -A$

解: 设单位矩阵交换第 i 行与第 j 得到的矩阵记为 E_{ij} , 那么 A 是置换矩阵当且仅当 A 是一系列形如 E_{ij} 的矩阵的乘积, 于是 A^{-1} 仍然是一系列形如 E_{ij} 的矩阵的乘积, A^{-1} 是置换矩阵. 而 $A^* = |A|A^{-1}$, 只有当 $|A| = 1$ 时才是置换矩阵, 当 $|A| = -1$ 时不是置换矩阵, 选 B.

6. 设 A, B 为 n 阶矩阵, β 为 n 维列向量, 若 A 的列向量组可由 B 的列向量组线性表示, 则 ()

- A. 当 $Ax = \beta$ 有解时, $Bx = \beta$ 有解 B. 当 $A^T x = \beta$ 有解时, $B^T x = \beta$ 有解
 C. 当 $Bx = \beta$ 有解时, $Ax = \beta$ 有解 D. 当 $B^T x = \beta$ 有解时, $A^T x = \beta$ 有解

解: 方程组 $Ax = \beta$ 有解等价于 β 可以由 A 的列向量组表示, 进一步可由 B 的列向量组表示, 从而 $Bx = \beta$ 有解, 选 A.

7. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$, 若方程 $f(x_1, x_2, x_3) = -1$ 表示的曲面为圆柱面, 则 ()

- A. $a = -4$, 且 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形为 $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$
 B. $a = -4$, 且 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换下标准型为 $-6y_1^2 - 6y_2^2$
 C. $a = 2$, 且 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形为 $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$
 D. $a = 2$, 且 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换下标准型为 $-6y_1^2 - 6y_2^2$

解: 二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}$, 于是 $|\lambda E - A| = (\lambda - a - 4)(\lambda - a + 2)^2$,

所以 A 的特征值为 $a + 4, a - 2, a - 2$, 即二次型在正交变换下的标准形为 $(a - 2)y_1^2 + (a - 2)y_2^2 + (a + 4)y_3^2$, 要使得 $f(x_1, x_2, x_3) = -1$ 表示圆柱面, 当且仅当 $a + 4 = 0, a - 2 < 0$, 选 B.

8. 设随机变量 $X \sim N(1, 2)$, 令 $f(t) = E[(X+t)^2]$, 则 $f(t)$ 的最小值点和最大值点分别为 ()
- A. 1, 2 B. 1, 4 C. -1, 2 D. -4, 4

解: $f(x) = E(X^2) + 2tE(x) + t^2$ 是 t 的二次函数, 显然当 $t = -E(X) = -\mu = -1$ 时, $f(t)$ 取最小值 $E[(X-\mu)^2] = D(X) = 2$, 选 C.

9. 设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$, 随机变量 Y 的分布函数为 $F(ay+b)$, X 的数学期望为 μ , 方差为 $\sigma^2 (\sigma > 0)$. 若 Y 的期望和方差为 0 和 1, 则 ()
- A. $a = \sigma, b = \mu$ B. $a = \sigma, b = -\mu$ C. $a = \frac{1}{\sigma}, b = \mu$ D. $a = \frac{1}{\sigma}, b = -\mu$

解: 由题意有 $P(Y \leq y) = F(ay+b) = P(X \leq ay+b) = P\left(\frac{X-b}{a} \leq y\right)$, 这说明 Y 与 $\frac{X-b}{a}$ 同分布, 于是 $E(Y) = E\left(\frac{X-b}{a}\right) = 0 \Rightarrow b = E(X) = \mu$. 而 $D(Y) = \frac{1}{a^2}D(X) = \frac{\sigma^2}{a^2} = 1 \Rightarrow a = \sigma$, 选 A.

10. 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X = k\} = \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{3^k}, k = 1, 2, \dots$, 则对于正整数 m, n , 有 ()
- A. $P\{X > m+n | X > m\} = P\{X > m\}$
 B. $P\{X > m+n | X > m\} = P\{X > n\}$
 C. $P\{X > m+n | X > m\} > P\{X > m\}$
 D. $P\{X > m+n | X > m\} > P\{X > n\}$

解: 首先对于 A 和 C 选项, 我们周定 m , 令 $n \rightarrow \infty$ 时, 左边是趋于 0 的, 因此 A 和 C 都不成立. 正确答案是 D, 下面来证明这个不等式.

$$\begin{aligned} & P(X > m+n | X > m) > P(X > n) \\ \Leftrightarrow & P(X > m+n) > P(X > m)P(X > n) \\ \Leftrightarrow & \sum_{k=m+n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{3^k}\right) > \sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{3^k}\right) \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{3^k}\right) \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2^{m+n+1}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^{m+n}} > \left(\frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^m}\right) \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^n}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow \frac{1}{2^{m+n+1}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^{m+n}} > \frac{1}{2^{m+n+2}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^m} \cdot \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3^{m+n}} \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{2^{m+n+2}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3^{m+n}} > \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^m} \cdot \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3^{m+n}} \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right) \left(\frac{1}{2^m} - \frac{1}{3^m}\right) > 0 \end{aligned}$$

这是显然成立的.

二、填空题: 11~16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

11. 设向量 $v_1 = (0, x, z), v_2 = (y, 0, 1)$, 令 $F(x, y, z) = v_1 \times v_2$, 则 $\text{div } F =$ _____.

解: 直接计算可得 $F(x, y, z) = (x, yz, -xy)$, 所以 $\text{div } F = 1 + z$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x \sin x}\right) =$ _____.

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + o(x^2) - (x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2))}{x^2} = \frac{1}{2}$.

13. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 2 \sin^2 t \\ y = t + \cos t \end{cases} (t \in (0, \frac{\pi}{2}))$ 确定, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} =$ _____.

解: 直接求导可得

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1 - \sin t}{4 \sin t \cos t} = \frac{1 - \sin t}{2 \sin 2t} \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx}\right) / \frac{dx}{dt} = \frac{-\cos t \cdot \sin 2t - 2 \cos 2t(1 - \sin t)}{4 \sin^3 2t} \\ \text{于是 } \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} &= -\frac{\sqrt{2}}{8}. \end{aligned}$$

14. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx =$ _____.

解：分部积分可得

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx = -\int_1^{+\infty} \ln(x+1) d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\ln(x+1)}{x} \Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx$$

$$= \ln 2 + \ln \frac{x}{x+1} \Big|_1^{+\infty} = 2 \ln 2$$

15. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$, 设 $m(X)$ 为 3 阶矩阵 X 的实特征值中的最大值. 若 $m(A) < m(B)$, 则 a 的取值范围是_____.

解：直接计算可得

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda - a & -2 \\ 0 & -2 & \lambda - a \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - a + 1)(\lambda - a - 2)$$

$$|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda - a & 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 2 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda - a \end{vmatrix} = (\lambda - a - 1)(\lambda - 2)(\lambda - a + 1),$$

于是 A 的特征值为 $1, a-1, a+2$, B 的特征值为 $a+1, 2, a-1$, 要使得 $m(A) < m(B)$, 当且仅当 $\max\{1, a+2\} < \max\{2, a+1\}$.

当 $a < -1$ 时, 这等价于 $1 < 2$, 满足题意; 当 $-1 \leq a < 1$ 时, 这等价于 $a+2 < 2$, 于是 $-1 \leq a < 0$;

当 $a \geq 1$ 时, 这等价于 $a+2 < a+1$, 这不可能, 因此 a 的范围是 $(-\infty, 0)$.

16. 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布, 随机变量 Y 服从参数为 3 的泊松分布, X 与 $Y - X$ 相互独立, 则 $E(XY) =$ _____.

解：由于 X 与 $Y - X$ 相互独立, 所以 $\text{Cov}(X, Y - X) = \text{Cov}(X, Y) - D(X) = E(XY) - E(X)E(Y) - D(X) = E(XY) - 1 \times 3 - 1 = 0$, 所以 $E(XY) = 4$.

三、解答题：17~22 小题, 共 70 分.

17. (本题 10 分) 求函数 $f(x, y) = (2x^2 - y^2)e^x$ 的极值.

解：解首先由 $\begin{cases} f'_x = (2x^2 - y^2 + 4x)e^x = 0 \\ f'_y = -2ye^x = 0 \end{cases}$ 解得驻点为 $(x, y) = (0, 0), (-2, 0)$. 进一步计算有

$$f''_{xx} = (2x^2 - y^2 + 8x + 4)e^x, f''_{xy} = -2ye^x, f''_{yy} = -2e^x$$

在点 $(0, 0)$ 处有 $A = f''_{xx}(0, 0) = 4, B = f''_{xy}(0, 0) = 0, C = f''_{yy}(0, 0) = -2$, 于是 $AC - B^2 < 0$, 这说明 $(0, 0)$ 不是极值点. 在点 $(-2, 0)$ 处有 $A = f''_{xx}(-2, 0) = -4e^{-2} < 0, B = f''_{xy}(-2, 0) = 0, C = f''_{yy}(-2, 0) = -2e^{-2}$, 于是 $AC - B^2 > 0$, 这说明 $f(x, y)$ 由唯一极大值 $f(-2, 0) = 8e^{-2}$.

18. (本题 12 分) 设 $f(u)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内具有 3 阶连续导数, 且存在可微函数 $F(x, y)$ 使得 $F(x, y) = \frac{f(xy)}{x^2y} dx + \frac{f''(xy)}{xy^2} dy (xy > 0)$.

(1) 证明: $\frac{f''(u)}{u} - \frac{f(u)}{u} = C, C$ 为常数;

(2) 设 $f(1) = 1, f'(1) = -1, f''(1) = 0$, 求 $f(u)$ 的表达式.

解：(1) 由题意可得 $\frac{\partial}{\partial y} \frac{f(xy)}{x^2y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{f''(xy)}{xy^2}$, 即

$$\frac{xyf'(xy) - f(xy)}{x^2y^2} = \frac{xyf'''(xy) - f''(xy)}{x^2y^2},$$

这等价于 $xyf'(xy) - f(xy) = xyf'''(xy) - f''(xy)$. 令 $u = xy$, 则 $uf'(u) - f(u) = uf'''(u) - f''(u)$, 即 $u[f'''(u) - f'(u)] - [f''(u) - f(u)] = 0$, 于是

$$\left(\frac{f''(u) - f(u)}{u}\right)' = \frac{u[f'''(u) - f'(u)] - [f''(u) - f(u)]}{u^2} = 0$$

所以 $\frac{f''(u)}{u} - \frac{f(u)}{u} = C, C$ 为常数.

(2) 由 (1) 有 $f''(u) - f(u) = Cu$, 代入 $f(1) = 1, f''(1) = 0$ 可得 $C = -1$. 于是方程变为 $f''(u) - f(u) = -u$, 这是一个二阶常系数非齐次线性微分方程, 通解为 $f(u) = C_1e^u + C_2e^{-u} + u$, 代入 $f(1) = C_1e + C_2e^{-1} + 1 = 1$ 和 $f'(1) = C_1e - C_2e^{-1} + 1 = -1$ 可得 $C_1 = -e^{-1}, C_2 = e$, 于是 $f(u) = -e^{u-1} + e^{1-u} + u$.

19. (本题 12 分) 设有向曲线 L 为椭圆 $x^2 + 3y^2 = 1$ 上沿逆时针方向从点 $A\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 到

$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 的部分, 计算曲线积分 $I = \int_L (e^{x^2} \sin x - 2xy) dx + (6x - x^2 - y \cos^4 y) dy$.

解: 解记曲线 L_1 表示从 B 到 A 的直线段, 则 $L_1: \begin{cases} y = x \\ x: \frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2} \end{cases}$. 设 L 与 L_1 围成的区域为 D , 则 D 是半轴长为 1 和 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 的半个椭圆, 于是

$$\begin{aligned} I &= \int_{L+L_1} + \int_{L_1^-} (e^{x^2} \sin x - 2xy) dx + (6x - x^2 - y \cos^4 y) dy \\ &= \iint_D (6 - 2x + 2x) dx dy + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [(e^{x^2} \sin x - 2x^2) + (6x - x^2 - x \cos^4 x)] dx \\ &= 6 \iint_D dx dy - 3 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2 dx = 6\pi \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \sqrt{3}\pi - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

20. (本题 12 分) 设可导函数 $f(x)$ 严格单调递增且满足 $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$. 记 $a = \int_0^1 f(x) dx$.

(1) 证明 $a > 0$;

(2) 令 $F(x) = a(1-x^2) + \int_1^x f(t) dt$, 证明: 存在 $\xi \in (-1, 1)$, 使 $F''(\xi) = 0$.

解: 由于 $f(x)$ 严格递增, 当 $x \in (0, 1)$ 时有 $f(-x) < f(x)$, 于是

$$\begin{aligned} a &= \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_{-1}^0 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 f(-x) dx \\ &< \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = 2a \end{aligned}$$

即 $a > 0$.

(2) 容易知道 $F(x)$ 是二阶可导的, 且

$$F(-1) = \int_1^{-1} f(t) dt = 0, F(0) = a + \int_1^0 f(t) dt = 0, F(1) = 0$$

那么由罗尔定理可知存在 $\xi_1 \in (-1, 0), \xi_2 \in (0, 1)$, 使得 $F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$, 再由罗尔定理可知存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (-1, 1)$, 使得 $F''(\xi) = 0$.

21. (本题 12 分) 已知向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4), G = (\alpha_1, \alpha_2)$.

(1) 证明: α_1, α_2 是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的极大线性无关组;

(2) 求矩阵 H 使得 $A = GH$, 并求 A^{10} .

解: (1) 对矩阵 A 做初等行变换化为行最简形:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由此可知 $r(\alpha_1, \alpha_2) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 2$, 于是 α_1, α_2 是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的极大线性无关组.

(2) 由 (1) 中行最简形的结果可知 $\alpha_3 = -\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_4 = \alpha_1 - \alpha_2$, 于是

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (\alpha_1, \alpha_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = GH$$

其中 $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. 所以

$$\begin{aligned} A^{10} &= (GH)^{10} = G(HG)^9 H \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \right]^9 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^9 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 0 & -1 \\ -1 & 9 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -8 & -9 & 9 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 9 & 10 & -10 & -10 \\ -1 & 7 & 8 & -8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

22. (本题 12 分) 假设某种元件的寿命服从指数分布, 其均值 θ 是未知参数, 为估计 θ , 取 n 个这种元件同时做寿命试验, 试验到出现 $k(1 \leq k \leq n)$ 个元件失效时停止.

(1) 若 $k = 1$, 失效元件寿命记为 T . (i) 求 T 的概率密度; (ii) 确定 a , 使 $\hat{\theta} = aT$ 是 θ 的无偏估计, 求 $D(\hat{\theta})$.

(2) 已知 k 个失效元件寿命值分别为 t_1, t_2, \dots, t_k 且 $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k$, 似然函数为

$$L(\theta) = \frac{1}{\theta^k} e^{-\frac{1}{\theta} [\sum_{i=1}^k t_i + (n-k)t_k]}, \text{ 求 } \theta \text{ 的最大似然估计值.}$$

解: (1) 总体的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$, 设 n 个元件的大命分别为 X_1, X_2, \dots, X_n , 而 T 是第一个失效元件的寿命, 所以 $T = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. 当 $t \leq 0$ 时, $P(T \leq t) = 0$; 当 $t > 0$ 时,

$$P(T \leq t) = P(\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \leq t) = 1 - P(\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} > t)$$

$$= 1 - P(X_1 > t, X_2 > t, \dots, X_n > t) = 1 - P(X_1 > t) P(X_2 > t) \cdots P(X_n > t)$$

$$= 1 - \left(\int_t^{+\infty} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx \right)^n = 1 - e^{-\frac{n}{\theta}t}$$

于是 T 的概率密度为 $g(t) = \begin{cases} \frac{n}{\theta} e^{-\frac{n}{\theta}t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$. 所以 T 服从参数为 $\frac{n}{\theta}$ 的指数分布, $E(T) = \frac{\theta}{n}, D(T) = \frac{\theta^2}{n^2}$. 于是 $E(\hat{\theta}) = aE(T) = \frac{a\theta}{n} = \theta \Rightarrow a = n$, 此时 $D(\hat{\theta}) = D(nT) = n^2 D(T) = \theta^2$.

(2) 取对数可得 $\ln L(\theta) = -k \ln \theta - \frac{1}{\theta} \left(\sum_{i=1}^k t_i + (n-k)t_k \right)$, 令

$$\frac{d}{d\theta} \ln L(\theta) = -\frac{k}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \left(\sum_{i=1}^k t_i + (n-k)t_k \right) = 0 \Rightarrow \theta = \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k t_i + (n-k)t_k \right),$$

即 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}_L = \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k t_i + (n-k)t_k \right)$.

注:

本题若不给似然函数, 那么我们可以导出似然函数的. 由已知, $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ 的联合概率密度函数为

$$f_{X_{(1)}, \dots, X_{(n)}}(t_1, \dots, t_n) = n! \prod_{i=1}^n f(t_i)$$

对 $t_{k+1}, t_{k+2}, \dots, t_n$ 积分 (积分域 $t_k < t_{k+1} < \dots < t_n < +\infty$), 从而

$$f_{X_{(1)}, \dots, X_{(n)}}(t_1, \dots, t_k) = n! \left[\prod_{i=1}^k f(t_i) \right] \int_{t_k < t_{k+1} < \dots < t_n} \prod_{j=k+1}^n f(t_j) dt_{k+1} \cdots dt_n$$

积分变量有 $n-1$ 个. 因为 f 在 t_k 以上是独立的, 这个排序积分可化为除以 $(n-k)!$ 乘以无排序积分. 无排序积分是对 t_{k+1}, \dots, t_n 每个变量在 $(t_k, +\infty)$ 上积分. 从而

$$\int_{t_k < t_{k+1} < \dots < t_n} \prod_{j=k+1}^n f(t_j) dt_{k+1} \cdots dt_n = \frac{1}{(n-k)!} \left[\int_{t_k}^{+\infty} f(u) du \right]^{n-k}$$

而 $\int_{t_k}^{+\infty} f(u) du = 1 - F(t_k)$, 所以

$$f_{X_{(1)}, \dots, X_{(n)}}(t_1, \dots, t_k) = \frac{n!}{(n-k)!} \left[\prod_{i=1}^k f(t_i) \right] [1 - F(t_k)]^{n-k}.$$

由于指数分布 $f(t) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{t}{\theta}}, F(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\theta}}$. 代入后得

$$\prod_{i=1}^k f(t_i) = \frac{1}{\theta^k} e^{-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^k t_i}, [1 - F(t_k)]^{n-k} = e^{-\frac{t_k}{\theta}(n-k)}$$

从而 $L(\theta) = \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^k t_i} \cdot e^{-\frac{1}{\theta}(n-k)t_k}$, 在求 MLE 时常始不影响 θ 的估计, 故取成题中的函数.